第 4 节 数列拔高小题专项（★★★★）

内容提要

数列综合小题种类繁多，若是压轴小题，难度往往较大，本节归纳了下面几类常见的题型：

1．数列的单调性：$\{a_n\}$为递增数列$\Leftrightarrow a_n<a_{n+1}$恒成立，$\{a_n\}$为递减数列$\Leftrightarrow a_n>a_{n+1}$恒成立. 分析数列的最大项或最小项，常需要判断数列的单调性，若通项不复杂，则可根据$a_n=f(n)$，用函数的方法来判断单调性. 若通项较复杂或没给通项，只给了递推公式，则可通过作差判断$a_{n+1}-a_n$的正负来研究$\{a_n\}$的单调性；若是正项数列，也可作商判断$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$与 1 的大小.

2．两数列的公共项问题：对于数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的公共项有关问题，在小题中有时可列出若干项，观察规律就能解决问题. 若要严格论证，由于公共项在两数列中的位置不同，故常设$a_m=b_n$，建立 m 和 n 的关系，结合 m，n 都为正整数来分析它们的取值情况.

3．递推式裂项：有的递推公式通过变形，可产生同一数列前后项的差（裂项），那么就可对其求和，进而分析一些问题.

4．数列中构造函数分析：在数列问题中，若涉及到指数、对数、三角与多项式混合的超越式，往往考虑构造函数分析问题.

5．放缩求和：当数列$\{a_n\}$无法求和，而问题又与其前 n 项和有关时，可考虑将a_n放缩成能求和的式子来处理，放缩时应往与a_n形式接近的能求和的结构去尝试. 常见的有放缩成等比数列、可裂项结构等.

6．找规律：这类题会给出一列数，或一些图形，解题的突破口往往是观察它们的规律，找到了规律，就能运用数列的方法进行接下来的推理.

7．综合提升题：这部分收录一些未进行归类的数列综合小题.

典型例题

类型Ⅰ：数列的单调性与最大最小项

【例 1】已知$\{a_n\}$为递减数列，若$a_n=-n^2+\lambda n$，则实数λ的取值范围是_____.

解析： $\{a_n\}$为递减数列可翻译成$a_n>a_{n+1}$，再研究怎样能使此不等式恒成立即可，

$a_n>a_{n+1}$即为$-n^2+\lambda n>-(n+1)^2+\lambda(n+1)$，整理得：$\lambda<2n+1$，因为$(2n+1)_{\min}=3$，所以$\lambda<3$.

答案： $(-\infty,3)$

【变式 1】若$a_n=\lambda(2^n-1)-n^2+4n$，且数列$\{a_n\}$为递增数列，则实数$\lambda$的取值范围是_____.

解析： $\{a_n\}$为递增数列可翻译成$a_n<a_{n+1}$，从而建立关于 n 的不等式来看，

由题意，$a_n<a_{n+1}$即为$\lambda(2^n-1)-n^2+4n<\lambda(2^{n+1}-1)-(n+1)^2+4(n+1)$，

整理得：$\lambda\cdot 2^n-2n+3>0$，所以$\lambda>\dfrac{2n-3}{2^n}$，要求$\dfrac{2n-3}{2^n}$的最大值，先分析$\left\{\dfrac{2n-3}{2^n}\right\}$的单调性，

令 $b_n=\dfrac{2n-3}{2^n}$，则 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{2(n+1)-3}{2^{n+1}}-\dfrac{2n-3}{2^n}=\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}-\dfrac{2(2n-3)}{2^{n+1}}=\dfrac{5-2n}{2^{n+1}}$，

当 $n=1$ 或 2 时，$b_{n+1}-b_n>0$，所以 $b_{n+1}>b_n$；当 $n\ge 3$ 时，$b_{n+1}-b_n<0$，所以 $b_{n+1}<b_n$；

从而 $b_1<b_2<b_3>b_4>b_5>\cdots$，故 $(b_n)_{\max}=b_3=\dfrac{3}{8}$，因为 $\lambda>b_n$ 恒成立，所以 $\lambda>\dfrac{3}{8}$.

答案：$(\dfrac{3}{8},+\infty)$

【变式 2】设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=1$，$a_n>0$，且 $S_n^2-(2n-1)S_n=S_{n-1}^2+(2n-1)S_{n-1}(n\ge 2)$，则 $b_n=\dfrac{S_n^2}{2^{a_n}}$ 的最大值是_____.

解析：所给关系式较复杂，先尝试化简，观察发现将 S_n 和 S_{n-1} 按次数组合可提公因式，

因为 $S_n^2-(2n-1)S_n=S_{n-1}^2+(2n-1)S_{n-1}$，所以 $(S_n+S_{n-1})(S_n-S_{n-1})-(2n-1)(S_n+S_{n-1})=0$，

故 $(S_n+S_{n-1})[S_n-S_{n-1}-(2n-1)]=0$ ①，

因为 $a_n>0$，所以 $S_n+S_{n-1}>0$，故式①可化为 $S_n-S_{n-1}-(2n-1)=0$，故 $a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1(n\ge 2)$，

又 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=2n-1$，

由 $a_{n+1}-a_n=2(n+1)-1-(2n-1)=2$ 得 $\{a_n\}$ 是等差数列，$S_n=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$，故 $b_n=\dfrac{S_n^2}{2^{a_n}}=\dfrac{n^4}{2^{2n-1}}$，

不难发现 $b_n>0$，要研究 b_n 的最大值，可先开根号将通项化简，再作差判断单调性，

记 $c_n=\sqrt{b_n}=\sqrt{\dfrac{n^4}{2^{2n-1}}}=\sqrt{\dfrac{n^4}{(2^n)^2\cdot 2^{-1}}}=\sqrt{\dfrac{2n^4}{(2^n)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}n^2}{2^n}$，

则 $c_{n+1}-c_n=\dfrac{\sqrt{2}(n+1)^2}{2^{n+1}}-\dfrac{\sqrt{2}n^2}{2^n}=\dfrac{\sqrt{2}(n+1)^2-2\sqrt{2}n^2}{2^{n+1}}=\dfrac{\sqrt{2}(-n^2+2n+1)}{2^{n+1}}$，

当 $n=1$ 或 2 时，$-n^2+2n+1>0$，所以 $c_{n+1}-c_n>0$，故 $c_{n+1}>c_n$；

当 $n\ge 3$ 时，$2-n\le -1$，所以 $-n^2+2n+1=n(2-n)+1\le -n+1<0$，从而 $c_{n+1}-c_n<0$，故 $c_{n+1}<c_n$；

把上面论证的结果用不等式串起来，就可以看出 c_n 的最大值了，

所以 $c_1<c_2<c_3>c_4>c_5>\cdots$，故 c_n 的最大值为 $c_3=\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$，又 $b_n=c_n^2$，所以 b_n 的最大值为 $\dfrac{81}{32}$.

答案：$\dfrac{81}{32}$

【总结】常通过比较 a_n 与 a_{n+1} 的大小来判断数列 $\{a_n\}$ 的单调性，有时会考虑先化简再作差（商）.

类型Ⅱ：两数列的公共项问题

【例 2】（2020•新高考Ⅰ卷）将数列 $\{2n-1\}$ 与 $\{3n-2\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$，则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为_____.

解法 1：作为填空题，可列出两个数列前面的若干项，看看公共项是哪些，总结规律即可，

数列 $\{2n-1\}$ 中的项为 1，3，5，7，9，11，13，15，17，19，…，

数列 $\{3n-2\}$ 中的项为 1，4，7，10，13，16，19，…，

观察可得两个数列的公共项为 1，7，13，19，…，所以 $\{a_n\}$ 构成首项为 1，公差为 6 的等差数列，

故 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n\times 1+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 6=3n^2-2n$.

解法 2：上面的解法 1 是观察归纳出来的，若要严格论证，可用通项来建立等量关系，

设数列 $\{2n-1\}$ 的第 n 项与 $\{3n-2\}$ 的第 m 项相等，即 $2n-1=3m-2$，所以 $n=\dfrac{3m-1}{2}(m,n\in\mathbf{N}^*)$，

因为当且仅当 m 为正奇数时，$3m-1$ 才能被 2 整除，此时 n 为正整数，即 m 可取 1，3，5，…，

所以数列 $\{3n-2\}$ 的奇数项即为两个数列的公共项，

若设 $b_n=3n-2$，则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1}$，

因为 b_1，b_3，b_5，…，b_{2n-1} 仍构成等差数列，所以 $S_n=\dfrac{n(b_1+b_{2n-1})}{2}=\dfrac{n[1+3(2n-1)-2]}{2}=3n^2-2n$.

答案：$3n^2-2n$

【总结】数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公共项问题，有限罗列总结规律是小题中常用的方法之一. 若要严格论证，可设 $a_m=b_n$，建立 m 和 n 的关系，再结合 $m,n\in\mathbf{N}^*$ 来分析各自的取值情况，从而解决问题.

类型III：递推式裂项

【例 3】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=a_n^2+a_n$，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $[\dfrac{1}{a_1+1}+\dfrac{1}{a_2+1}+\cdots+\dfrac{1}{a_{100}+1}]=$（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

解析：所求式子中有数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n+1}\right\}$ 的前 100 项和，故尝试由所给递推公式变出 $\dfrac{1}{a_n+1}$ 这一结构，

因为 $a_{n+1}=a_n^2+a_n$，所以 $a_{n+1}=a_n(a_n+1)$①，两端取倒数可产生 $\dfrac{1}{a_n+1}$，先分析左右是否为 0，

由 $a_1>0$ 及 $a_2=a_1^2+a_1$ 得 $a_2>0$，由 $a_2>0$ 及 $a_3=a_2^2+a_2$ 得 $a_3>0$，…，以此类推可知 $a_n>0$ 恒成立，

所以式①可变形成 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n(a_n+1)}=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_n+1}$，故 $\dfrac{1}{a_n+1}=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}$，

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_{100}+1}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{99}}-\frac{1}{a_{100}}+\frac{1}{a_{100}}-\frac{1}{a_{101}}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{101}}=2-\frac{1}{a_{101}}\quad ②，$$

要分析 $2-\dfrac{1}{a_{101}}$ 的范围，需估计 a_{101} 的范围，可通过分析 $\{a_n\}$ 的单调性来研究 a_{101} 的取值情况，

由 $a_{n+1}=a_n^2+a_n$ 可得 $a_{n+1}-a_n=a_n^2\geq 0$，所以 $a_{n+1}\geq a_n$，

又 $a_1=\frac{1}{2}$，所以 $a_2=a_1^2+a_1=\frac{3}{4}$， $a_3=a_2^2+a_2=\frac{21}{16}>1$，从而 $a_{101}\ge a_3>1$，故 $1<2-\frac{1}{a_{101}}<2$，

结合式②可得 $[\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_{100}+1}]=1$.

答案：A

【总结】对递推式裂项，常从要求和的式子出发，由递推式凑出该结构，并分离出来，达到裂项的效果.

类型Ⅳ：数列中构造函数分析

【例 4】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_1<1$， $a_{n+1}=a_n+\ln(2-a_n)$，则下列说法正确的是（　　）

（A） $0<a_{100}<\frac{1}{2}$　　（B） $\frac{1}{2}<a_{100}<1$　　（C） $1<a_{100}<\frac{3}{2}$　　（D） $\frac{3}{2}<a_{100}<2$

解析：递推式中有 $\ln(2-a_n)$，对递推式变形较困难，可尝试把 a_n 看成自变量，构造函数分析，

设 $f(x)=x+\ln(2-x)(x<2)$，则 $a_{n+1}=f(a_n)$，且 $f'(x)=1+\frac{1}{2-x}\cdot(-1)=\frac{1-x}{2-x}$，

所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x<1$， $f'(x)<0\Leftrightarrow 1<x<2$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上↗，在 $(1,2)$ 上↘，

有了 $f(x)$ 的单调性，我们可以先把 a_1 的范围代进去，分析 a_2 的范围，寻找规律，

因为 $0<a_1<1$，且 $a_2=f(a_1)$，所以 $f(0)<a_2<f(1)$，即 $\ln 2<a_2<1$ ①，

注意到 $(\ln 2,1)\subseteq(0,1)$，于是我们由 $a_1\in(0,1)$ 和 $a_2=f(a_1)$ 得出了 $a_2\in(0,1)$，这一过程可重复下去，

同理，由 $\begin{cases}a_2\in(0,1)\\a_3=f(a_2)\end{cases}$ 可得出 $a_3\in(0,1)$，由 $\begin{cases}a_3\in(0,1)\\a_4=f(a_3)\end{cases}$ 可得出 $a_4\in(0,1)$，…，

以此类推可知数列 $\{a_n\}$ 中的项都在 $(0,1)$ 上，故排除 C、D 选项，

此时观察 A、B 选项发现只需再判断 a_{100} 与 $\frac{1}{2}$ 的大小，可结合 $\{a_n\}$ 的单调性来看，

因为 $0<a_n<1$，且 $a_{n+1}=a_n+\ln(2-a_n)$，所以 $a_{n+1}-a_n=\ln(2-a_n)>0$，故 $a_{n+1}>a_n$，

所以 $\{a_n\}$ 为递增数列，故 $a_{100}>a_2$，由①知 $a_2>\ln 2>\frac{1}{2}$，所以 $a_{100}>\frac{1}{2}$，故 $\frac{1}{2}<a_{100}<1$.

答案：B

【例 5】已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n， $\sin(a_4-1)+2a_4-5=0$， $\sin(a_8-1)+2a_8+1=0$，则下列结论正确的是（　　）

（A） $S_{11}=11$， $a_4<a_8$　　（B） $S_{11}=22$， $a_4<a_8$　　（C） $S_{11}=22$， $a_4>a_8$（D） $S_{11}=11$， $a_4>a_8$

解析：条件是关于 a_4 和 a_8 的，故用它们求 S_{11}， $\{a_n\}$ 是等差数列 $\Rightarrow S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=\frac{11(a_4+a_8)}{2}$ ①，

由给的两个等式无法求出 a_4 和 a_8，它们的形式比较接近，考虑化同构形式，构造函数分析，

$\sin(a_4-1)+2a_4-5=0\Rightarrow\sin(a_4-1)+2(a_4-1)-3=0$ ②，

$\sin(a_8-1)+2a_8+1=0\Rightarrow-\sin(a_8-1)-2a_8-1=0\Rightarrow\sin(1-a_8)+2(1-a_8)-3=0$ ③，

设 $f(x)=\sin x+2x-3(x\in\mathbf{R})$，则 $f'(x)=\cos x+2>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，

由式②③可得 $f(a_4-1)=f(1-a_8)=0$，所以 $a_4-1=1-a_8$，故 $a_4+a_8=2$，代入①得：$S_{11}=11$；

再比较 a_4 和 a_8 的大小，注意到 a_4-1 和 $1-a_8$ 都是 $f(x)$ 的零点，故只需估算零点的范围即可，

因为 $f(1)=\sin 1-1<0$，$f(2)=\sin 2+1>0$，所以 $f(x)$ 的零点在 $(1,2)$ 上，

从而 $\begin{cases}1<a_4-1<2\\1<1-a_8<2\end{cases}$，故 $\begin{cases}2<a_4<3\\-1<a_8<0\end{cases}$，所以 $a_4>a_8$.

答案：D

【总结】由上面两道题可以看出，当所给条件为指数、对数、三角与多项式混合的超越结构时，这类式子不大可能通过简单变形就解决问题，故常考虑构造函数分析.

类型Ⅴ：放缩求和

【例 6】（多选）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$，则（　　）

（A）$\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$ 是等比数列　（B）$a_n=\frac{3^n-2}{2}$　（C）$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_n+1}<1$　（D）$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$

解析：要分析 $\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$ 是否为等比数列，可由所给递推公式凑出这一形式来看，

因为 $a_{n+1}=3a_n+1$，所以 $a_{n+1}+\frac{1}{2}=3a_n+1+\frac{1}{2}=3(a_n+\frac{1}{2})$ ①，又 $a_1=1$，所以 $a_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\neq 0$，

结合式①知数列 $\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$ 是首项为 $\frac{3}{2}$，公比为 3 的等比数列，所以 $a_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\times 3^{n-1}$，从而 $a_n=\frac{3^n-1}{2}$，

故 A 项正确，B 项错误；

C 项，$\frac{1}{a_n+1}=\frac{2}{3^n+1}$，为了大致判断此选项是否成立，先取 $n=1,2,3$ 检验，可发现结论都成立，且随着项数的增加，后面加上去的项越来越小，故猜想 C 项正确，再尝试证明，$\left\{\frac{1}{a_n+1}\right\}$ 无法直接求和，但只要把分母的 1 丢掉，就可以求和了，先试试直接丢项放缩，

因为 $\frac{1}{a_n+1}=\frac{2}{3^n+1}<\frac{2}{3^n}$，所以 $\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_n+1}<\frac{2}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^n}=\frac{\frac{2}{3}[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}=1-(\frac{1}{3})^n<1$，

故 C 项正确；

对于 D 项，$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3^n-1}$，仍可通过取 $n=1,2,3$ 检验发现结论都成立，故猜想 D 项也正确，再尝试证明，此处若直接丢项，得到的是 $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3^n-1}>\frac{2}{3^n}$，放缩的方向都不对，怎么办呢？从 $\frac{1}{a_n}$ 的结构来看，放缩成公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列这一方向是正确的，但需调整系数，于是用待定系数法，先设 $\frac{2}{3^n-1}\le p(\frac{1}{3})^n(p>0)$，再将

其求和，根据要证的结果来反推要什么样的 p，即 $\sum_{k=1}^{n}p(\frac{1}{3})^k=\frac{p}{2}-\frac{p}{2}\cdot(\frac{1}{3})^n<\frac{p}{2}$，故应取 $\frac{p}{2}=\frac{3}{2}$，此时 $p=3$，代回 $\frac{2}{3^n-1}\le p(\frac{1}{3})^n$ 可得 $\frac{2}{3^n-1}\le(\frac{1}{3})^{n-1}$，下面先作差分析此不等式是否成立，

因为 $\frac{2}{3^n-1}-(\frac{1}{3})^{n-1}=\frac{2}{3^n-1}-\frac{3}{3^n}=\frac{2\times3^n-3(3^n-1)}{(3^n-1)3^n}=\frac{3-3^n}{(3^n-1)3^n}\le0$，所以 $\frac{2}{3^n-1}\le(\frac{1}{3})^{n-1}$，即 $\frac{1}{a_n}\le(\frac{1}{3})^{n-1}$，

从而 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\le(\frac{1}{3})^0+(\frac{1}{3})^1+\cdots+(\frac{1}{3})^{n-1}=\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\times(\frac{1}{3})^n<\frac{3}{2}$，故 D 项正确.

答案：ACD

【反思】若要放缩成等比数列求和，直接丢项是最简单的放缩方法，但若尝试后发现不行，则可用待定系数法来调整. 另外，本题的不等式 $\frac{2}{3^n-1}\le(\frac{1}{3})^{n-1}$ 也可用糖水不等式来证，即 $\frac{2}{3^n-1}\le\frac{2+1}{3^n-1+1}=(\frac{1}{3})^{n-1}$.

类型Ⅵ：找规律

【例 7】已知 $k\in\mathbf{N}^*$，数列 1，1，2，1，1，2，4，2，1，1，2，4，8，4，2，1，…，1，2，4，…，2^{k-2}，2^{k-1}，2^{k-2}，…，4，2，1，… 的前 n 项和为 S_n，若 $S_n>2024$，则 n 的最小值为_____.

解析：条件中给出了数列足够多的项，应先观察这些项的规律，

为了便于分析，记所给数列为 $\{a_n\}$，将 $\{a_n\}$ 按连续的 1 的中间为分界进行分组，并画成下面的图，

第1行　1

第2行　$1\ \ 2\ \ 1$

第3行　$1\ \ 2\ \ 4\ \ 2\ \ 1$

第4行　$1\ \ 2\ \ 4\ \ 8\ \ 4\ \ 2\ \ 1$

……　　……

第k行　$1\ \ 2\ \ 4\ \cdots\ 2^{k-2}\ \ 2^{k-1}\ \ 2^{k-2}\ \cdots\ 4\ \ 2\ \ 1$

我们应判断恰使 $S_n>2024$ 的最后一项 a_n 位于第几行，可先求出第 k 行的和，再用它求前 k 行的和，

记第 k 行的和为 b_k，数列 $\{b_k\}$ 的前 k 项和为 T_k，由上图，$b_k=1+2+4+\cdots+2^{k-2}+2^{k-1}+2^{k-2}+\cdots+4+2+1$

$=2(1+2+4+\cdots+2^{k-1})-2^{k-1}=2\times\frac{1-2^k}{1-2}-2^{k-1}=2(2^k-1)-2^{k-1}=4\times2^{k-1}-2-2^{k-1}=3\times2^{k-1}-2$，

前 k 行的和 $T_k=b_1+b_2+\cdots+b_k=3\times2^0-2+3\times2^1-2+\cdots+3\times2^{k-1}-2=3\times\frac{1-2^k}{1-2}-2k=3(2^k-1)-2k$，

由 $b_k>0$ 知 $\{T_k\}$ 是递增数列，又 $T_9=3\times(2^9-1)-18=1515<2024$，$T_{10}=3\times(2^{10}-1)-20=3049>2024$，

所以刚好能使 $S_n>2024$ 成立的 a_n 应在第 10 行，接下来分析 a_n 是第 10 行的第几项，

因为 $2024-T_9=2024-1515=509$，所以第 10 行的第 1 项到 a_n 这一项的和应恰好大于 509，

第 10 行为 1，2，4，…，2^8，2^9，2^8，…，4，2，1，因为 $1+2+4+\cdots+2^7=\frac{1-2^8}{1-2}=255<509$，

$1+2+4+\cdots+2^8=\frac{1-2^9}{1-2}=511>509$，所以刚好能使 $S_n>2024$ 成立的 a_n 为第 10 行的第 9 个数，

由图可知第 k 行有 $2k-1$ 个数，前 9 行共 $1+3+5+\cdots+17=\dfrac{9\times(1+17)}{2}=81$ 个数，

所以使 $S_n>2024$ 成立的 n 最小时，a_n 为第 $81+9=90$ 项.

答案： 90

类型Ⅶ：综合提升题

【例 8】（2022 • 北京卷（改））已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，$a_1=2$，$\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $a_nS_n=a_{n+1}^2+a_{n+1}S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，给出下列四个结论：①$a_2<1$；②$\{a_nS_n\}$ 为常数列；③$\{a_n\}$ 为递增数列；④$\{a_n\}$ 中存在小于 $\dfrac{1}{100}$ 的项. 其中所有正确结论的序号是_____.

解析： ①项，在 $a_nS_n=a_{n+1}^2+a_{n+1}S_n$ 中取 $n=1$ 可得 $a_1S_1=a_2^2+a_2S_1$，又 $S_1=a_1=2$，所以 $4=a_2^2+2a_2$，

解得：$a_2=\pm\sqrt{5}-1$，又 $\{a_n\}$ 各项均为正数，所以 $a_2=\sqrt{5}-1>1$，①错误；

②项，$a_nS_n=a_{n+1}^2+a_{n+1}S_n\Rightarrow a_nS_n=a_{n+1}(a_{n+1}+S_n)=a_{n+1}S_{n+1}$，所以 $\{a_nS_n\}$ 为常数列，②正确；

③项，注意到 $\{a_n\}$ 为正项数列，由②中 $a_nS_n=a_{n+1}S_{n+1}$ 可变出 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，判断它与 1 的大小即得单调性，

$a_nS_n=a_{n+1}S_{n+1}\Rightarrow\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{S_n}{S_{n+1}}$，因为 $\{a_n\}$ 各项均为正数，所以 $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}>S_n>0$，从而 $\dfrac{S_n}{S_{n+1}}<1$，

故 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{S_n}{S_{n+1}}<1$，所以 $a_{n+1}<a_n$，故 $\{a_n\}$ 为递减数列，③错误；

④项，正面分析较困难，可从反面考虑，先直观想象若 $\{a_n\}$ 中的项都不小于 $\dfrac{1}{100}$，则当 $n\to+\infty$ 时，$S_n\to+\infty$，而 $a_n\geq\dfrac{1}{100}$，从而必有 $a_nS_n\to+\infty$，$\{a_nS_n\}$ 不可能为常数列，下面用反证法来严格论证，

假设 $\{a_n\}$ 中不存在小于 $\dfrac{1}{100}$ 的项，则 $a_n\geq\dfrac{1}{100}$ 恒成立，因为 $\{a_nS_n\}$ 为常数列，所以 $a_nS_n=a_1S_1=a_1^2=4$，

故当 $n>40000$ 时，$a_nS_n\geq\dfrac{S_n}{100}>\dfrac{S_{40000}}{100}\geq\dfrac{40000\times\frac{1}{100}}{100}=4$，矛盾，故 $\{a_n\}$ 中存在小于 $\dfrac{1}{100}$ 的项，④正确.

答案： ②④

【反思】 当正面证明结论较困难时，可考虑用反证法，即先假设结论不成立，并由此出发推出矛盾，从而否定假设，得出结论.

强化训练

提醒：本节包含大量压轴小题，难度很高，请同学们做好心理准备.

1.（2023 •全国模拟 •★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(20-n)\cdot(\dfrac{3}{2})^n$，则 a_n 取得最大值时，$n=$_____.

2．（2023・广东联考・★★★）数学家康托（Cantor）在线段上构造了一个不可数点集：康托三分集. 将闭区间$[0,1]$均分为三段，去掉中间的区间段$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$，余下的区间长度为$a_1$；再将余下的两个区间$[0,\frac{1}{3}]$和$[\frac{2}{3},1]$分别均分为三段，并各自去掉中间的区间段，余下的区间长度为a_2，以此类推，不断地将余下各区间段均分为三段，并各自去掉中间的区间段. 重复这一过程，余下的区间集合即为康托三分集，记数列$\{a_n\}$表示第n次操作后余下的区间长度.

（1）$a_4 =$_____；（2）若$\forall n \in \mathbf{N}^*$，都有$n^2 a_n \le \lambda a_4$，则实数$\lambda$的取值范围是_____.

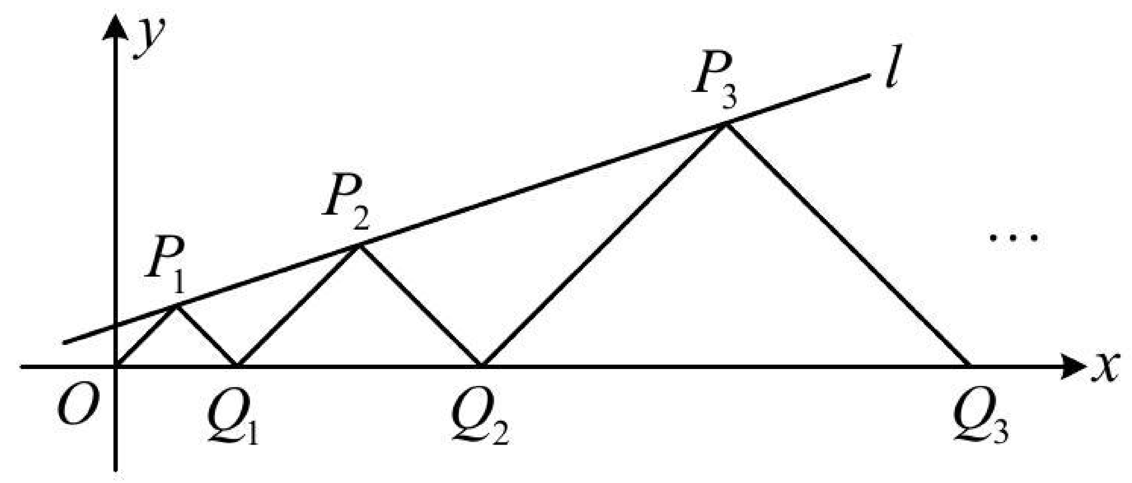
3．（2023・全国模拟・★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1} = \log_2(a_n + 1)$，若$\{a_n\}$是递增数列，则$a_1$的取值范围是（　　）

（A）$(0,1)$　（B）$(0,\sqrt{2})$　（C）$(-1,0)$　（D）$(1,+\infty)$

4．（2022・佛山统考・★★★）（多选）已知$a_n = 2n-1$，$b_n = 3n-1$，将数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的公共项按从小到大的顺序组成一个新的数列$\{c_n\}$，设$\{c_n\}$的前n项和为S_n，则下列说法正确的是（　　）

（A）$2023 \in \{c_n\}$　（B）$c_{2023} = b_{4046}$　（C）$S_{2023} \in \{a_n\}$　（D）$S_{2023} \in \{b_n\}$

5．（2023 • 四川模拟 • ★★★★）如图，直线 $l: y=\frac{1}{3}x+1$ 上的点 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$ 与 x 轴正半轴上的点 $Q_i(i=1,2,\cdots,n)$ 及原点 O 构成一系列等腰直角三角形 ΔOP_1Q_1，$\Delta Q_1P_2Q_2$，$\Delta Q_2P_3Q_3$，$\cdots$，$\Delta Q_{n-1}P_nQ_n$，且 $\angle P_i=90^{\circ}(i=1,2,\cdots,n)$，记点 Q_n 的横坐标为 a_n，则 $a_1=$_____；$a_n=$_____.



6．（2023 • 重庆模拟 • ★★★★）记 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[2.3]=2$，$[-1.2]=-2$．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{7}{3}$，且 $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$，则 $[\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2023}}]=$_____.

7．（2023 • 牡丹江模拟 • ★★★★）数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_1<1$，$e^{a_{n+1}}=(3-a_n)e^{a_n}$，则下列说法正确的是（）

（A）数列 $\{a_n\}$ 为递减数列

（B）存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_n<0$

（C）存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_n>2$

（D）存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_n>\frac{4}{3}$

8．（2022 • 辽宁模拟 • ★★★★）设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，且 $a_n+2S_{n-1}=\frac{1}{a_n}(n\geq 2)$，则 $[\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{80}}]=$_____.

9.（2022·南通期中·★★★★）（多选）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$，则（　　）

（A）$a_{n+1}\ge 2a_n$　　（B）$\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$是递增数列　　（C）$\{a_{n+1}-4a_n\}$是递增数列　　（D）$a_n\ge n^2-2n+2$